Totalreelle rationale Funktionen.

Von GYULA SZ.-NAGY in Szeged.

§ 1. Einleitung.

Die rationalen Funktionen

$$(1) \qquad F(z)=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\ldots+b_n}=\frac{f(z)}{g(z)} \quad \text{und} \quad G(z)=\frac{g(z)}{f(z)}$$

haben den Grad n, wenn $|a_0|+|b_0|\neq 0$ ist. Sie sind *irreduzibel*, wenn die Polynome $f(z)$ und $g(z)$ keine gemeinsame Nullstelle besitzen. Die irreduzible rationale Funktion $F(z)$ nimmt jeden Wert Z in n Punkten, in den Z-Stellen der Funktion an. Diese Z-Stellen sind die Nullstellen der Funktion $F(z)-Z$, oder des Polynoms

$$(2) \qquad P(z;Z)\equiv f(z)-Z\,g(z)\equiv g(z)\,[F(z)-Z].$$

Der Grad des Polynoms $P(z;Z)$ ist nur dann kleiner als n, wenn $a_0-Z\,b_0=0$ ist. Bei diesem Wert Z rechnet man auch $z=\infty$ den endlichen Z-Stellen zu.

Die rationale Funktion $F(z)$ wird dann *totalreell* genannt, wenn sie außerhalb der reellen Achse keinen reellen Wert annimmt. Die einfachsten totalreellen rationalen Funktionen sind z, $-z$, z^{-1} und $-z^{-1}$. Ist die rationale Funktion $F(z)$ irreduzibel und totalreell, so hat das Polynom $P(z;Z)$ bei jedem reellen Wert Z lauter reelle Nullstellen. Man kann offenbar annehmen, daß die Polynome $f(z)$ und $g(z)$ reelle Koeffizienten besitzen.

Der Wert $Z=F(z)$ einer totalreellen rationalen Funktion $F(z)$ ist reell bzw. nichtreell, je nachdem die Zahl z reell bzw. nichtreell ist. Besteht also die eine der Ungleichungen

$$\operatorname{Im} z\neq 0,\ \operatorname{Im} Z\neq 0 \qquad [\operatorname{Im}(x+iy)=y,\ \operatorname{Re}(x+iy)=x],$$

so besteht auch die andere.

Die Determinante $D=a_0b_1-a_1b_0$ wird die *Charakteristik* der totalreellen rationalen Funktion $F(z)$ (mit reellen Koeffizienten) von der Form (1) genannt. Die totalreellen Funktionen $-F(z)$ und $[F(z)]^{-1}$ haben offenbar die Charakteristik $-D$. Die Funktionen $F(z)-\lambda$ sind bei jedem reellen Wert λ offenbar totalreell und haben die Charakteristik D.

Die wichtigsten Eigenschaften der totalreellen rationalen Funktionen werden in dem folgenden Satz zusammengefaßt:

I. *Die totalreelle irreduzible rationale Funktion $F(z)$ n-ten Grades*

$$F(z)=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\ldots+b_n}, \quad |a_0|+|b_0|\neq 0, \quad D=a_0b_1-a_1b_0,$$

hat die charakteristischen Eigenschaften:

1. *Die irreduzible algebraische Kurve n-ter Ordnung*

$$\Phi(x,y) \equiv f(x) - y \cdot g(x) = 0$$

wird von jeder zur x-Achse parallelen Geraden in n getrennten reellen Punkten geschnitten. $F(z)$ nimmt also jeden reellen Wert in verschiedenen n Punkten an.

2. *Die Partialbruchzerlegung der Funktion $F(z)$ hat im Falle $b_0 \neq 0$ bzw. $b_0 = 0$ die Form*

$$F(z) = \frac{a_0}{b_0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{z - \beta_k}, \quad DB_k < 0, \quad b_0^2 \sum_{k=1}^{n} B_k = -D, \quad \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n, \tag{3}$$

bzw.

$$F(z) = A_0 z + A + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_k}{z - \beta_k}, \quad b_1^2 A_0 = D \, (= a_0 b_1), \quad DB_k < 0. \tag{4}$$

3. *Ist* $\operatorname{Im} z \neq 0$, *so ist* $D \cdot \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} F(z) > 0$.

4. *Sind λ und $\mu (\neq \lambda)$ reelle Zahlen, so werden die λ-Stellen der Funktion $F(z)$ von ihren μ-Stellen getrennt und umgekehrt.* (Zwischen zwei benachbarten λ- bzw. μ-Stellen von $F(z)$ liegt nämlich genau eine μ- bzw. λ-Stelle.)

5. *Sind λ und μ $(\neq 0)$ beliebige reelle Zahlen, so liegen sämtliche Nullstellen des Polynoms $Q(z) \equiv f(z) - (\lambda + i\mu)\, g(z)$ auf derjenigen Seite der reellen Achse, wo $D\mu \cdot \operatorname{Im} z > 0$ ist.*

6. *Eine rationale Funktion mit einer dieser Eigenschaften, ist totalreell.*[1])

---

[1]) Trennende Polynome und damit einzelne Teile des Satzes I wurden in den folgenden Arbeiten untersucht: CH. HERMITE, Question 777—779, *Nouvelles Annales de Math.*, (2) **5** (1866), S. 432—479; A. POULAIN, Théorèmes généraux sur les équations algébriques, *Ebenda* (2) **6** (1867), S. 21—33; CH. BIEHLER, Sur une classe des équations algébriques dont toutes les racines sont réelles, *Journal für Math.*, **87** (1879), S. 350—352; E. LAGUERRE, *Oeuvres*, Bd. I (Paris, 1898), S. 109—110; M. FUJIWARA, Einige Bemerkungen über die elementare Theorie der algebraischen Gleichungen, *The Tôhoku Math. Journal*, **9** (1916), S. 102—108; Y. OKADA, On some algebraic equations whose roots are real and distinct, *Ebenda*, **14** (1918), S. 328—333; G. PÓLYA—G. SZEGŐ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. I—II (Berlin, 1925); P. MONTEL, Sur les fractions rationnelles entrelacées, *Mathematica Cluj*, **5** (1931), S. 110—129.

Die Montelschen „fractions rationnelles entrelacées" haben die Eigenschaften der totalreellen rationalen Funktionen. P. MONTEL hat auch trennende Polynome auf einer Kurve definiert. Auf einer konvexen Kurve trennende Polynompaare wurden in der Arbeit von C. COLOMBO untersucht: Intorno alla distribuzione degli zeri di certi polinomi, *Atti Acad. naz. Lincei*, (3) **8** (1947), S. 530—535.

Weitere Arbeiten, die Verallgemeinerungen auf transzendente Funktionen enthalten: N. TSCHEBOTARÖW, On entire functions with real interlacing roots, *Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. URSS*, (N. S.) **35** (1942), S. 195—197; N. MEYMANN, On the problem of Hermite—Hurwitz for integer transcendental functions, *Ebenda*, **40** (1943), S. 46—49, On the distribution of the zeroes of an integer function, *Ebenda*, **40** (1943), S. 179—181; B. LEVIN, Hermite's criterion for integral functions of exponential type, *Ebenda*, **41** (1943), S. 47—50.

§ 2. Beweis des Satzes I.

1. Die Kurve $\Phi(x,y)=0$ hat offenbar keinen singulären Punkt. Sie wird von einer Geraden $y=y_0$ in keinem Punkt (x_0,y_0) berührt. Widrigenfalls gäbe es eine zur Tangente $y=y_0$ benachbarte Gerade $y=y_1$, die mit der Kurve um mindestens zwei weniger reelle Treffpunkte besitzt, als die Gerade $y=y_0$. Dann hätte das Polynom $P(z;y_1)$ mindestens zwei nichtreelle Nullstellen. Daraus folgt die Richtigkeit des Teilsatzes I. 1.

2. Aus I. 1 folgt, daß die Nullstellen von $f(z)$ und $g(z)$ reell und voneinander verschieden sind.

Im Falle $b_0 \neq 0$ hat die Partialbruchzerlegung von $F(z)$ die Form

$$F(z)=\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n} = \frac{f(z)}{g(z)} = A + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{z-\beta_k}, \quad B_k \neq 0.$$

Aus dem Vergleich der Koeffizienten von z^n und z^{n-1} in der Identität

$$f(z)=g(z)\left[A+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{z-\beta_k}\right], \quad g(z)=b_0\prod_{k=1}^{n}(z-\beta_k),$$

folgen die Gleichungen $A=\frac{a_0}{b_0}$, $b_0^2 \sum_{k=1}^{n} B_k = -D = -(a_0 b_1 - a_1 b_0)$. Wir müssen noch zeigen, daß die B_k dasselbe Vorzeichen besitzen. Wäre $B_k B_j < 0$, so hätte die Funktion

$$H(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{(x-\beta_k)^2+y^2}, \quad B_k \neq 0, \tag{5}$$

bei einer genügend kleinen positiven Zahl ε in den Punkten (β_k,ε) und (β_j,ε) entgegengesetzte Vorzeichen. Auf der Verbindungsstrecke dieser Punkte gäbe es also einen Punkt $z_0=x_0+i\varepsilon$, wo $\operatorname{Im} F(z_0)=-\varepsilon H(x_0,\varepsilon)=0$ ist. Dies ist aber ein Widerspruch, weil $F(z_0)$ nicht reell ist.

Im Falle $b_0=0$ ist $a_0 \neq 0$, weil $|a_0|+|b_0|\neq 0$. Dann ist

$$F(z)=A_0 z + A + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_k}{z-\beta_k},$$

wo offenbar $A_0=\frac{a_0}{b_1}=\frac{D}{b_1^2}$ ist. Wäre $B_k B_j < 0$ oder $A_0 B_k > 0$, so hätte

$$H_1(x,y)=-A_0+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_k}{(x-\beta_k)^2+y^2} \tag{6}$$

bei genügend kleinem positivem ε in den Punkten (β_k,ε) und (β_j,ε) bzw. (β_k,ε) und $(\beta_k,\varepsilon^{-1})$ offenbar entgegengesetzte Vorzeichen. Es gäbe dann auf der Verbindungsstrecke dieser zwei Punkte mindestens einen Punkt $z_0=x_0+i\varepsilon$ bzw. $z_1=\beta_k+iy_1$ $(\varepsilon<y_1<\varepsilon^{-1})$, wo $\operatorname{Im} F(z_0)=0$ bzw. $\operatorname{Im} F(z_1)=0$ ist, weil $\operatorname{Im} F(x+iy)=-y\,H_1(x,y)$ ist.

Daraus folgt die Richtigkeit des Teilsatzes I. 2.

3. Auf Grund von (5) und (6) erhält man aus (3) bzw. (4) die Gleichung $D \operatorname{Im}(x+iy) \cdot \operatorname{Im} F(x+iy) = -Dy^2 H(x,y)$ bzw. $D \operatorname{Im}(x+iy) \cdot \operatorname{Im} F(x+iy) = -Dy^2 H_1(x,y)$. Daraus folgt die Richtigkeit von I. 3, weil $-DB_k > 0$ und $DA_0 > 0$ sind.

4. Jedes von z abhängige Glied von (3) oder (4) nimmt auf der reellen Achse monoton zu bzw. ab, wenn $D<0$ bzw. $D>0$ ist. In einer Strecke (β_k, β_{k+1}) $(k=1,2,\ldots,n-1)$ ist $F(z)$ stetig und monoton und nimmt jeden reellen Wert an.

Die Funktion $F(z)$ und damit das Polynom $f(z)$ hat also in der Strecke (β_k, β_{k+1}) genau eine Nullstelle. Durch die Anwendung dieses Beweisgangs auf die Reziproke von $F(z)$ ergibt sich, daß die Nullstellen von $g(z)$ diejenigen von $f(z)$ trennen.

Die Funktion

$$F_1(z) = \frac{F(z)-\lambda}{F(z)-\mu} = \frac{f(z)-\lambda g(z)}{f(z)-\lambda g(z)} = \frac{f_1(z)}{g_1(z)},$$

wo λ und $\mu (\neq \lambda)$ reelle Zahlen sind, ist eine totalreelle rationale Funktion n-ter Grades. Die Nullstellen des Polynoms $f_1(z)$ bzw. $g_1(z)$ sind λ- bzw. μ-Stellen von $F(z)$ und sie trennen einander. Damit ist I. 4 bewiesen.

5. Ist z_0 eine beliebige Nullstelle des Polynoms $Q(z) = f(z) - (\lambda + i\mu) g(z)$ $(\mu \neq 0)$, die keine Nullstelle von $g(z)$ ist, so sind

$$\frac{Q(z_0)}{g(z_0)} = F(z_0) - \lambda - i\mu = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} F(z_0) = \mu.$$

Aus I. 3 folgt $D\mu \operatorname{Im} z_0 > 0$. Damit ist I. 5 bewiesen.

6. Man kann leicht einsehen, daß die Eingenschaften I. 1—I. 4 charakteristisch sind. Z. B. aus I. 4 folgt I. 1. Zwei λ-Stellen können nämlich nicht zusammenfallen, weil sie von einer μ-Stellen getrennt werden. Die charakteristische Eigenschaft von I. 5 folgt aus dem bekannten Satz von HERMITE und BIEHLER.[2])

§ 3. Die zwei Arten der totalreellen rationalen Functionen.

Die totalreelle rationale Funktion $F(z)$ ist von *positiver* bzw. *negativer Art*, je nachdem ihre Charakteristik $D = a_0 b_1 - a_1 b_0$ positiv bzw. negativ ist. Ist $F(z)$ von positiver bzw. negativer Art, so sind ihre Residua nach I. 2 negativ bzw. positiv.

Sind $z\zeta = 1$ und $F\left(\frac{1}{z}\right) = \Phi(\zeta)$, so ist $\Phi(z)$ eine totalreelle rationale Funktion mit der Charakteristik $D' = a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n$ und $DD' <$ ist. Im Falle $\operatorname{Im} z \neq 0$ sind nämlich $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} \zeta < 0$, $D \operatorname{Im} \zeta \cdot \operatorname{Im} F(\zeta) = D \operatorname{Im} \zeta \cdot \operatorname{Im} \Phi(z) > 0$, $D' \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} \Phi(z) > 0$ und $DD' \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} \zeta \cdot [\operatorname{Im} \Phi(z)]^2 > 0$.

Es gilt der zusammenfassende Satz

[2]) A. a. O.; auch bei LAGUERRE, bei PÓLYA - SZEGŐ, Bd. I, S. 256.

II. 1. *Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige reelle Zahlen, mit $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, und ist $F(z)$ eine totalreelle rationale Funktion mit der Charakteristik D, so sind*

$$F_0(z) = \frac{\alpha F(z) + \beta}{\gamma F(z) + \delta} \quad \text{und} \quad \Delta F(z)$$

totalreelle rationale Funktionen mit der Charakteristik $D_0 = \Delta D$.

2. *Sind $p_1, p_2, \ldots, p_m$ positive Zahlen und bezeichnen $F_1(z), F_2(z), \ldots, F_m(z)$ totalreelle rationale Funktionen derselben Art, so ist auch*

$$F(z) = p_1 F_1(z) + p_2 F_2(z) + \ldots + p_m F_m(z)$$

eine totalreelle rationale Funktion derselben Art. Die iterierten Funktionen

$$F_{hj}(z) = F_h[F_j(z)] \qquad (h = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, m)$$

sind totalreelle rationale Funktionen positiver Art. [3])

3. *Besitzt das Polynom $P(z)$ m-ten Grades lauter reelle Nullstellen und ist*

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}$$

totalreell, so sind die rationalen Funktionen

$$F(z), \ \Phi(z) = \frac{a_0 P(z) + a_1 P'(z) + \ldots + a_n P^{(n)}(z)}{b_0 P(z) + b_1 P'(z) + \ldots + b_n P^{(n)}(z)} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad F_k(z) = \frac{f^{(k)}(z)}{g^{(k)}(z)}$$

bzw.

$$R(z) = \frac{P'(z)}{P(z)}, \quad R_1(z) = \frac{P''(z)}{P'(z)}, \ldots, \ R_{m-1}(z) = \frac{P^{(m)}(z)}{P^{(m-1)}(z)}$$

totalreell von derselben Art bzw. von negativer Art.

Die Funktion $F_0(z)$ in II. 1 ist totalreell, weil

$$\operatorname{Im} F_0(z) = \frac{\Delta}{|\gamma z + \delta|^2} \operatorname{Im} F(z).$$

Ist $\operatorname{Im} z \neq 0$, so haben die Produkte $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} F_k(z)$ und $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} F(z) = \sum_{k=1}^{m} p_k \operatorname{Im} z \, . \operatorname{Im} F_k(z)$ in II. 2 dasselbe Vorzeichen.

Sind $F_k(z) = Z_k$ ($k = 1, 2, \ldots, m$), so haben die Produkte $\operatorname{Im} z \, . \operatorname{Im} F_k(z) = \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} Z_k$ und $\operatorname{Im} Z_j \cdot \operatorname{Im} F_h(Z_j)$ dasselbe Vorzeichen. Daraus folgt, daß $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} Z_j \cdot \operatorname{Im} Z_j \cdot \operatorname{Im} F_h(Z_j) = \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} F_{hj}(z) \cdot (\operatorname{Im} Z_j)^2$ und $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} F_{hj}(z)$ positiv sind.

Damit sind die Sätze II. 1 und II. 2 bewiesen.

Die λ-Stellen der Funktion $F(z)$ sind Nullstellen des Polynoms

$$Q(z; \lambda) = f(z) - \lambda g(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^{n-k}, \quad c_k = a_k - \lambda b_k.$$

---

[3]) Iterierte totalreelle Funktionen wurden zum erstenmal von P. Montel a. a. O. behandelt.

Das Polynom $Q(z;\lambda)$ hat also bei jedem reellen Wert des Parameters λ lauter reelle Nullstellen.

Nach dem bekannten Hermite-Poulainschen Satz hat auch das Polynom

$$\sum_{k=0}^{n} c_k P^{(k)}(z) \equiv \varphi(z) - \lambda\psi(z)$$

bei jedem reellen Wert von λ lauter reelle Nullstellen. Die Funktion $\Phi(z)$ nimmt also jeden reellen Wert auf der reellen Achse an. Sie ist also totalreell.[4])

Sind $P(z) = z^m + p_1 z^{m-1} + \ldots$, $\varphi(z) = u_0 z^m + u_1 z^{m-1} + \ldots$ und $\psi(z) = v_0 z^m + v_1 z^{m-1} + \ldots$, so sind $u_1 = a_0 + m a_1 p_1$, $v_1 = b_0 + m b_1 p_1$, $u_0 = a_0$, $v_0 = b_0$. $\Phi(z)$, $F_1(z)$ bzw. $R(z)$ hat also die Charakteristik mD, $n(n-1)D$ bzw. $-m$. Daraus folgt die Richtigkeit von II. 4.

Ist $F(z)$ von negativer Art, so ist auch die Funktion

$$G(z) = F(z) + R(z) = \frac{f(z)}{g(z)} + \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{S(z)}{g(z)\,P(z)}$$

totalreell und das Polynom $S(z)$ hat deshalb lauter reelle Nullstellen.

III. *Ist $F(z) = f(z) : g(z)$ eine irreduzible totalreelle Funktion von negativer Art und besitzt ein Polynom $P(z)$ lauter reelle Koeffizienten, so hat das Polynom*

$$S(z) = P(z)\,f(z) + P'(z)\,g(z)$$

mindestens soviel reelle Nullstellen wie $P(z)$.

$P(z)$ hat die Form $P(z) = P_0(z)\,P_1(z)$, wo das Polynom $P_0(z)$ bzw. $P_1(z)$ lauter reelle bzw. lauter nichtreelle Nullstellen hat. Die Funktion

$$G_0(z) = F(z) + \frac{P_0'(z)}{P_0(z)} = \frac{S_0(z)}{g(z)\,P_0(z)} = G(z) - \frac{P_1'(z)}{P_1(z)} = G(z) - R_1(z)$$

ist totalreell und von negativer Art. Ihre Partialbruchzerlegung hat also die Form

$$G_0(z) = A_0 z + A + \sum_{k=1}^{N} \frac{B_k}{z - \beta_k}, \quad \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_N, \quad A_0 \leqq 0, \quad B_k > 0.$$

$G_0(z)$ hat die Pole $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ und im Falle $A_0 \neq 0$ auch $\beta_{N+1} = \infty$. Diese sind die reellen Pole von $G(z)$, da $R_1(z)$ auf der reellen Achse beschränkt ist. Beide Funktionen $G_0(z)$ und $G(z)$ sind innerhalb der Strecke (β_k, β_{k+1}) $(k = 1, 2, \ldots, N-1)$ stetig und haben bei Anfang und bei Ende der Strecke gleiche Vorzeichen. Dies gilt im Falle $A_0 \neq 0$ auch für die Strecken $(-\infty, \beta_1)$ und $(\beta_N, +\infty)$.

In jeder dieser $N-1$ bzw. $N+1$ Strecken hat $G_0(z)$ bzw. $G(z)$ genau eine bzw. mindestens eine Nullstelle, weil das Vorzeichen von $G_0(z)$ bzw. $G(z)$ sich auf einer dieser Strecken einmal bzw. mindestens einmal verändert. Im Falle $A_0 \neq 0$ hat also $G_0(z)$ bzw. $G(z)$ $N+1$ bzw. mindestens $N+1$ reelle Nullstellen. Ebenso sieht man im Falle $A_0 = 0$ ein, daß $G_0(z)$ bzw. $G(z)$

[4]) Dieser Beweis rührt von MONTEL her, a. a. O.

außerhalb der Strecke (β_1, β_N) eine bzw. mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

$G(z)$ hat also mindestens soviel reelle Nullstellen, wie $G_0(z)$. Das Polynom $S(z)$ hat also mindestens soviel reelle Nullstellen, wie $S_0(z)$, das lauter reelle Nullstellen besitzt. Damit ist der Satz III bewiesen.

Dieser Satz enthält in sich einen von A. RÉNYI in 1942 bewiesen, noch nicht veröffentlichten Satz, wobei $f(z) = az + b$ und $g(z) = cz + d$ sind. RÉNYI hat damals aus seinem Satz durch Spezialisierung von a, b, c, d und durch iterierte Anwendung der erhaltenen Resultate mehrere allgemeine Sätze abgeleitet.[5])

§ 4. Polynome, deren Nullstellen positive Imaginärteile besitzen. Kreiszweiecke, in denen eine totalreelle rationale Funktion jeden Wert annimmt.

Das Kreiszweieck $K(a, b; \gamma)$ $(0 < \gamma < \pi)$ bezeichnet den Bereich, von dessen Punkten aus die Strecke (a, b) unter einem Winkel $\geqq \gamma$ erscheint. Dieser Bereich wird von zwei kongruenten Kreisbogen begrenzt. Er liegt im Kreise $\left|z - \frac{a+b}{2}\right| \leqq \left|\frac{b-a}{2}\right| \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$, wenn $\gamma < \frac{\pi}{2}$ ist.

IV. *Haben die Nullstellen des Polynoms n-ten Grades*

$$P(z) = (z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_n)$$

positive Imaginärteile, liegen die Punkte a und b (> a) auf der reellen Achse und ist das Verhältnis P(b) : P(a) eine reelle negative bzw. positive Zahl, so enthält das Kreiszweieck $K\left(a, b; \frac{\pi}{n}\right)$ *bzw.* $K\left(a, b; \frac{2\pi}{n}\right)$ *mindestens eine Nullstelle von P(z) im Innern, oder jede Nullstelle von P(z) am Rande.*

Erscheint die Strecke (a, b) vom Punkt c_k aus unter dem Winkel γ_k $(0 < \gamma_k < \pi)$ und ist $\operatorname{arc} \frac{P(b)}{P(a)} = \omega$ $(0 < \omega \leqq 2\pi)$, so ist $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k = \omega + 2p$, wo p eine nichtnegative ganze Zahl ist.

Während ein Punkt x die reelle Achse in positiver Richtung beschreibt, nimmt der Winkel $\varphi_k(x) = \operatorname{arc}(x - c_k)$ offenbar von Null ausgehend bis π stetig und monoton zu.

$$\Phi(x) \equiv \operatorname{arc} P(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc}(x - c_k)$$

---

[5]) Z. B. die Aufgaben 63 und 67 im Abschnitt III von PÓLYA—SZEGŐ, Bd. I. Nach einer Mitteilung von A. RÉNYI hat er mit seinem früh verstorbenen Freunde, M. SCHWEITZER, auch die Eigenschaften der Polynome $f(z)$ und $g(z)$ untersucht, für welche $S(z)$ bei jedem Polynom $P(z)$ mit lauter reellen Nullstellen nur reelle Nullstellen besitzt. So gelangten sie zu mehreren Eigenschaften der totalreellen rationalen Funktionen.

ist also eine monoton zunehmende stetige Funktion der reellen Veränderlichen x. Daraus folgen die Relationen

$\gamma_k = \varphi_k(b) - \varphi_k(a)$ $(k=1,2,\ldots,n)$, $\Phi(b) - \Phi(a) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k = \omega + 2p\pi$ und

$\frac{\omega}{n} \geqq \operatorname{Min} \gamma_k (k=1,\ldots,n)$, wo das Gleichheitszeichen nur im Falle $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n$, $p=0$ bestehen kann. Daraus folgt der Satz IV im Falle $\omega = \pi$ bzw. $\omega = 2\pi$. Im ersten bzw. zweiten Fall ist der Satz IV eine Folgerung bzw. ein Grenzfall eines allgemeinen Satzes von M. FEKETE [6]).

Dieser Satz gilt offenbar auch dann, wenn die Nullstellen von $P(z)$ negative Imaginärteile besitzen. Er gilt in entsprechender Form für Polynome, deren Nullstellen auf einer Seite einer Geraden liegen, z. B. auch für die Hurwitzschen Polynome (deren Nullstellen negative Realteile besitzen).

Der Satz IV ist ein Hilfssatz zum Satz

V. *Nimmt eine totalreelle rationale Funktion $F(z)$ n-ten Grades in den Punkten a und b ($>a$) der reellen Achse denselben Wert an, so nimmt sie im Kreiszweieck $K\left(a, b; \frac{\pi}{n}\right)$ jeden Wert an. Enthält das Innere dieses Bereichs keine Z_0-Stelle der Funktion, so enthält sein Rand jede Z_0-Stelle von $F(z)$.*

Ist C bzw. d eine beliebige reelle Zahl bzw. der kleinste Abstand zwischen zwei C-Stellen von $F(z)$ und ist $n>1$, so nimmt $F(z)$ im Parallelstreifen von der Breite $\frac{d}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$, der von der reellen Achse halbiert wird, jeden Wert an.

Zum Beweis kann man offenbar annehmen, daß $g(a)\,g(b) \neq 0$ ist.

Nach I. 4 nimmt $F(z)$ auf der Strecke (a, b) jeden reellen Wert an. Ist $Z = \lambda + i\mu$ $(D\mu > 0)$, so haben die Z-Stellen von $F(z)$ positive Imaginärteile, weil sie Nullstellen des Polynoms $Q(z) = f(z) - Zg(z)$ von I. 5 sind. $Q(z)$ hat die Eigenschaft von $P(z)$ im Satz IV, weil

$$\frac{Q(b)}{Q(a)} = \frac{f(b) - Zg(b)}{f(a) - Zg(a)} = \frac{g(b)}{g(a)}\,\frac{F(b) - Z}{F(a) - Z} = \frac{g(b)}{g(a)}$$

reell ist. Nach IV gibt es in $K\left(a, b; \frac{\pi}{n}\right)$, von dem $K\left(a, b; \frac{2\pi}{n}\right)$ offenbar enthalten wird, mindenstens einen Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$, wo $F(z_0) = Z_0$ ist. Auch $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$ liegt in $K\left(a, b; \frac{\pi}{n}\right)$ und $F(\bar{z}_0) = \bar{Z}_0 = \lambda - i\mu$ ist. Daraus folgt der Satz V auch dann, wenn $D\mu < 0$ ist, weil der zweite Absatz von V aus dem ersten folgt.

---

[6]) M. FEKETE, Über die Nullstellenverteilung bei Polynomen, deren Wert an zwei Stellen gegeben ist, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, **35** (1925), S. 220—233.

§ 5. Die Abbildung der komplexen Ebene durch eine totalreelle rationale Funktion $F(z)$.

Die Transformation $Z = F(z)$ bestimmt eine konforme Abbildung der komplexen z-Ebene auf die Z-Ebene. Nach I. 3 wird dadurch die obere Halbebene der z-Ebene auf die obere bzw. untere Halbebene der Z-Ebene abgebildet, je nachdem die Art von $F(z)$ positiv bzw. negativ ist, und auch die inverse Abbildung hat diese Eigenschaft.

VI. *Enthält eine Strecke s der reellen Achse der z-Ebene die Pole β_k der totalreellen Funktion*

$$(7)\qquad Z = F(z) = \frac{a_0 z_0 + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{z - \beta_k}, \quad D = a_0 b_1 - a_1,$$

$\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_k$ *und bezeichnet $\delta(\varrho)$ in der z-Ebene den Bereich, dessen Punkte außerhalb jedes Kreises vom Halbmesser ϱ liegen, dessen Mittelpunkt auf s fällt, so wird $\delta(\varrho)$ durch die Transformation $Z = F(z)$ auf einen Teil des Kreises $|Z - a_0| \leqq \frac{|D|}{\varrho} = \varrho'$ abgebildet.*

Durch die Inverse dieser Transformation wird der Bereich $|\operatorname{Im} Z| \geqq \varrho$ auf einen Teilbereich der konvexen Hülle $\delta(\varrho')$ der von s berührten Kreise vom Halbmesser ϱ' abgebildet.

In einem Punkt z_0 von $\delta(\varrho)$ sind

$$|z_0 - \beta_k| < \varrho \text{ und } |F(z_0) - a_0| \leqq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{B_k}{z_0 - \beta_k} \right| < \frac{|\Sigma B_k|}{\varrho} = \frac{|D|}{\varrho} = \varrho'.$$

Zum Beweis des zweiten Absatzes von VI kann man offenbar annehmen, das $D > 0$ ist. Sind dann $z = x + iy$ $(y \neq 0)$ und $F(z) = X + iY$, so ist

$$0 < \frac{\operatorname{Im} F(z)}{\operatorname{Im} z} = \frac{Y}{y} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-B_k}{|z - \beta_k|^2}.$$

Bestehen die Ungleichungen $|z - \beta_k| \geqq |z - \beta_p|$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ 1 \leqq p \leqq n)$, so ist $\frac{Y}{y} \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{-B_k}{|z - \beta_p|^2} = \frac{D}{|z - \beta_p|^2}$, oder $(x - \beta_p)^2 + \left(y - \frac{D}{2Y}\right)^2 \leqq \left(\frac{D}{2Y}\right)^2$.

Ist $|Y| \geqq \varrho$, also $\frac{D}{|Y|} \leqq \varrho'$, so liegt der Punkt z in $\delta_1(\varrho')$, weil er in einem Kreis vom Halbmesser $\leqq \varrho'$ liegt, von dem die Strecke s in einem Punkt (β_p) berührt wird. Damit ist der Satz V bewiesen. Daraus folgt der Satz.

VII. *Ist $F(z) = f(z) : g(z)$ eine totalreelle rationale Funktion mit der Charakteristik D, sind A, B und B' reelle Zahlen und ist $D = BB'$, so liegen die Nullstellen des Polynoms $P(z) \equiv [f(z) - A]^2 + B^2 g^2(z)$ im Parallelstreifen $|\operatorname{Im} z| \leqq |B'|$.*

Die Punkte z, in denen $F(z) = A + iB$ oder $F(z) = A - iB$ ist, genügen der Gleichung $[f(z) - (A + iB)\, g(z)] \cdot [f(z) - (A - iB)\, g(z)] \equiv P(z) = 0$. Der Parallelstreifen $|\operatorname{Im} z| \leqq |B'|\ (= \varrho')$ enthält den Bereich $\delta_1(\varrho')$ von VI.

Ist $f(z)=g'(z)$, so ist $D=-n$. Aus VII folgt also der Satz[7]:
Hat das Polynom $g(z)$ n-ten Grades lauter reelle Nullstellen, so liegen die Nullstellen des Polynoms $g^2(z)+g'^2(z)$ im Parallelstreifen $|\operatorname{Im} z|\leqq\sqrt{n}$.

§ 6. Die Lage der Fixpunkte der Transformation $Z=F(z)$.

Die Fixpunkte der Transformation $Z=F(z)$ sind die Nullstellen der Funktion $G(z)=-z+F(z)$. Ist $F(z)$ eine totalreelle rationale Funktion n-ten Grades und ist $b\neq 0$, so besitzt $G(z)$ $n+1$ endliche Nullstellen. Bei $D<0$ ist $G(z)$ totalreell, ihre Nullstellen sind also von ihren endlichen Polen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ getrennt.

Bei $D>0$ ist $G(z)$ nicht totalreell, sie hat aber höchstens zwei nichtreelle Nullstellen. $G(z)$ hat nämlich in einer Strecke (β_k, β_{k+1}) $(k=1,2,\ldots,n-1)$ mindestens eine Nullstelle, weil sie am Anfang und am Ende entgegengesetzte Vorzeichen besitzt. Hat $G(z)$ nur reelle Nullstellen, so fallen entweder drei Nullstellen in eine Strecke (β_k, β_{k+1}) oder zwei Nullstellen in die eine der Strecken $(-\infty, \beta_1)$ und $(\beta_n, +\infty)$. Widrigenfalls wäre nämlich $G(z)$ totalreell, weil ihre Nullstellen von ihren Polen getrennt wären. $G(z)$ hat höchstens eine mehrfache Nullstelle.

Ein nichtreeller oder mehrfacher Fixpunkt ζ der Transformation $Z=F(z)$ $(b_0\neq 0)$ fällt mindestens in einen der Kreise $|z-\beta_k|\leqq\dfrac{D^{1/2}}{b_0}$.

Ein nichtreeller bzw. mehrfacher Fixpunkt ζ genügt nämlich der Gleichung

$$\frac{\operatorname{Im} G(z)}{\operatorname{Im} z}=-1-\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{|z-\beta_k|^2}=0 \text{ bzw. } G'(z)=-1-\sum\frac{B_k}{|z-\beta_k|^2}=0.$$

Sind also $|\zeta-\beta_k|\geqq|\zeta-\beta_p|$ $(k=1,\ldots,n;\ 1\leqq p\leqq n)$, so sind

$$1=\sum_{k=1}^{n}\frac{-B_k}{|\zeta-\beta_k|^2}\leqq\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}-B_k}{|\zeta-\beta_p|^2}=\frac{D}{b_0^2|\zeta-\beta_p|^2}, \text{ also } |\zeta-\beta_p|^2\leqq\frac{D}{b_0^2}.$$

Im Falle $b_0=0$ hat $G(z)$ die Form

$$G(z)=(A_0-1)z+A+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{z-\beta_k},\quad A_0=\frac{a_0}{b_1},\quad D=a_0b_1=b_1^2b_0,\quad D\,B_k<0.$$

$G(z)$ ist dann totalreell, wenn $A_0-1=0$, oder $(A_0-1)D>0$ ist, wenn also $(A_0-1)D=a_0(a_0-b_1)\geqq 0$ ist. Dann sind die Nullstellen von $G(z)$ (die Fixpunkte der Transformation) von den Polen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ getrennt. Im Falle $a_0(a_0-b_1)<0$ kann $G(z)$ nichtreelle oder mehrfache Nullstellen haben. Diese fallen mindestens in einen der Kreise $|z-\beta_k|\leqq\left(\dfrac{b_1\sum\limits_{k=1}^{n}B_k}{b_1-a_0}\right)^{1/2}$. Dies läßt sich ebenso einsehen, wie vorher.

(Eingegangen am 31. März 1948.)

[7]) E. Cesàro, *Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und Infinitesimalrechnung* (Leipzig, 1904), S. 431–432.